線型計画論と技術的補完

AUTHOR(S):
今川, 正

CITATION:
今川, 正. 線型計画論と技術的補完. 經濟論叢 1956, 78(3): 241-266

ISSUE DATE:
1956-09

URL:
https://doi.org/10.14989/132493

經濟論叢

第七十八巻　第三號

〔昭和三十一年九月〕

京都大學經濟學會

線型計画論と技術的補完

今川　正

Ⅰ　はしがき

これまで新古典学派によって生産の理論は最初に折れ目のないなめらかな曲線を仮定することによって説明された。けれどもここではこのような曲線を議論の出発点とせず、それより一歩前の段階―原単位点―からそれを導き出すことより議論をはじめる。こうすることによって、これまでの生産の分析を一層基本的な概念から始めることができるのみでなく、そうすることによって、これまでの方法では充分に取扱えなかった問題を分析することが可能になるであろう。

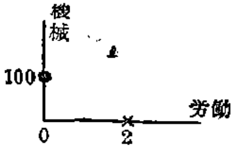
この分析にあたって私は線型計画論の分析方法を用いた。この方法によって現実の問題を分析したとき、他の方

法より優れているか否かについては個々の具体的問題についてこの方法が用いられたときその成果によって判定する他はなく、一般的に答えることはむずかしい。たとえば下にわれわれが仮定するような一つの生産方法によって一〇〇台の自動車をつくるのも一〇〇〇台の自動車をつくるのも原単位が同じという仮定や、二つの生産方法を併用しても互に援けたり阻止したりしないという仮定、あるいは連続性は仮定するが微分可能性は仮定しない等のことは、折れ目のないなめらかな等生産量線による新古典派の分析におけるより優れている場合もあるが、また劣っている場合もあるだろう。

なおここでは等生産量線が導き出されるまでの過程、およびこのようにして形成された等生産量線が集まってつくる等生産量線図の性質について考え、価格の問題には一切ふれない。これはそうすることによってのみ生産の技術的関係を明らかにすることができると考えるからに他ならない。

II　原単位

綿布を織るのにある新式の機械を一〇〇時間運転すると一単位の布ができる。この機械を運転しないときには労働者が二週間働かなければならない。いま横軸に労働時間縦軸にこの機械の運転時間をあらわすとき一単位の布をつくるに必要な生産要素の集りは座標軸上の点〇又は×印で示される。また高炉によって銑鉄一トンつくるのに鉄鉱石一・五トンとコークス〇・七五トンが必要である。これは横軸に鉄鉱石縦軸コにークスを測る平面上の一点 $\begin{bmatrix}1.5\\0.75\end{bmatrix}$ で示すことができる。



これらの点は座標軸上にあるかないかの別はあるけれども、いずれも一単位の生産物をつくるに必要な生産要素の数量すなわち原単位をあらわしている。そのためこれらを原単位点とよぶ。これは投入量の組合わせの基本的な形を示している。高炉で一万トンの銑鉄をつくるとき鉄鉱石コークスの比は二対一であるが、この比は生産方法がかわらなければ銑鉄を二万トンつくるときも同じであるとする。原点と原単位点とを結ぶ線の勾配によってこの投入量の比をあらわすことができる。この比がかわるものは別の生産方法をあらわすものとみることができるであろう。

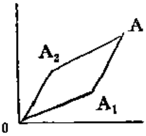
このようにして一つの生産方法がきまるとそれによって銑鉄を一万トンつくっても二万トンつくっても投入量の比は二対一であるが、二万トンつくるときには一万トンつくるときと比べ、銑鉄一トン当りに要する鉄鉱石コークスが一割づつ少くてもよいかも知れない。もしこのように少くなれば大規模生産のため原料が節約されたと考えられ、多ければ生産規模が大きすぎるため原料が余計かかると考えられる。そのいずれが現実的であるかは個々の場合について見る他はない。ただここでは特に断らない限り一万トンつくるときも二万トンつくるときも原単位はつねに一定であるとする。すなわち生産を拡大しても原単位の節約（正又は負の方向）はないものとする。これは線型計画論においては可分性 divisibility の仮定とよばれている。

さて上にのべた原単位点は投入量の組合わせを示すが、それは同時にいま一つ別の数量すなわち一単位の生産量を示すものとみよう。こうすればこの点はその生産方法による一単位の操業度をあらわすものとみることができる。いまこのような点と原点とを結ぶ線（原点を通る直線を軸とよぶ）上に一、二、三…単位の生産量を示す点をとるとその間隔は等しくなる。それは投入量が二倍三倍…となることをあらわすと同時にそれからできる生産物が二倍

三倍…となることをあらわす。もし大規模生産によって投入量の節約があればその間隔は次第に短くなり、反対に生産拡張によって生産能率が低下し原単位が大きくなるときにはこの間隔は長くなる。

一台の自動車をつくるのにある生産方法によると労働機械をそれぞれa_1、a_2だけつかわねばならないのに、他の生産方法によるとその二倍も三倍もかかるとすると前者より後者は技術的に劣っていることは明らかである。また労働時間は同じであるが機械を永く運転しなければならないときも劣っている。（この点を強調するためには有効原単位点といってもよい）

ここではこのように技術的に劣る生産方法は除いておき考えないことにする。このような性質をもっている二つの生産方法を併用するときどのようになるかについて考えよう。いまある生産方法によって自動車を一台つくるのに二週間の労働と一〇〇時間の機械の運転を必要とする。これは原単位点 $A_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ で示される。また他の生産方法によるときには一週間の労働と一五〇時間の機械の運転を要する。$A_2=\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$ もしこの会社で両方の生産方法を併行的につかい三週間の労働がつかわれ二五〇時間の機械が運転されるときには二台の自動車ができるであろう。このことはまず第一の生産方法によって$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$を投下して$A_1$に移り、ついで（$AA_1$は$OA_2$に平行でかつ等しいから）第二の生産方法によって$\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$を投下して$A_1$よりAに移ると考えてもよい。このことは



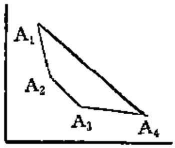
$$A_1+A_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1\\1+1.5\end{bmatrix}=A$$

とかくことができる。この式はAの示す投入量の組合わせがA_1の示す投入量にA_2の示すそれを加えたものに等しい

ことを示している。こういえるためにはつぎの仮定を認めなければならない。すなわち最初にOから始めて自動車を一台つくるのに$\begin{pmatrix}1\\1.5\end{pmatrix}$の生産要素がいる。ところがもしすでに第一の生産方法によって一台つくった後（A_1から）、更に上と同じ$\begin{pmatrix}1\\1.5\end{pmatrix}$だけ生産要素をつかったとき矢張り一台しかできないであろうか。このときには前の生産にたすけられていわば加え算以上の効果を発揮するかもしれない。しかしここではこの効果はないものと考えOから始めてもA_1からはじめても$\begin{pmatrix}1\\1.5\end{pmatrix}$の投入量は一台の自動車を産出するものとする。われわれの加え算的効果しか認めない仮定は線型計画論では加法性 aditivity の仮定とよばれている。

Ⅲ　等生産量線

いま考えている会社に四つの生産方法があるものとしよう。それぞれの生産方法の原単位点をA_1、A_2、A_3、A_4とするとこの点を互に結び合わせる線分によって一つの平面をかくすることができる。すなわちこれらの点は一つの領域を張る。ただしたとえばA_2が線分 A_1A_3 上にあるときにはA_2はA_1とA_3とを組合わせてつくることができ独立の原単位点とは考えられないから、このような点は上の四つの原単位から除いてあるものとする。



任意の二つの原単位点A_1、A_3を結ぶ線分上の点Aはその両端の点を用い$A=xA_1+(1-x)A_3$ $(1\geqq x\geqq 0)$ とあらわすことができる。このAは等生産量線 A_1A_3 上にあるから一台の自動車をつくるに必要な投入量の組合わせをあらわす。これよりつぎのことが容易にわかる。原単位点の張る領域間の点はいずれも自動車一台をあらわすという共通な性質をもっており、またその中から任意の二点をえらんでもそれを結ぶ線分上の点が同じ性質——自動車一台分をあら

わす―― をもっている。このように一つの集合に属する任意の二点を選ぶときその間の点がその集合に属するから、上の集合は数学では凸集合 convex set であるといわれる。いま原単位点は四つあるからこの集合は凸四角形となっている。

このようにしてできる凸多角形内の点はいずれも一台の自動車をつくるに技術的に必要とされる投入量の組合わせを示す。その中から技術的に劣っているものは除く。たとえばA_2を通る軸とA_1A_4を結ぶ線分との交点をAとするとAは一台の自動車をつくるに必要な投入量をあらわしている。しかしAはA_2を通る軸上にありしかもAの方が大きい。これはAがA_2より技術的に劣ることを示す、これら技術的に劣るものを除くと凸四辺形のうち線分A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4だけ残る。実際この凸四辺形の左下方の境界線をなす折れた線分上にある点のみが技術的に劣っていないものとして残される。こうしてえられる折線を等生産量（折）線とよぶ。（これが新古典派の考えているような曲線となるためには原単位点が無数にある等の条件をみたさなければならない）

このとき一台の自動車をつくるのに機械運転時間の長い生産方法によると労働時間は短かい。すなわち等生産量線は右下りである。いま$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$から$A_2=\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$へ移るとき労働投入量は$(a_{11}-a_{21})$だけふえているが、機械運転時間は$(a_{12}-a_{22})$だけ減っている。この労働を一単位ふやすために節約される機械運転時間

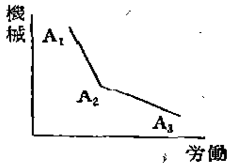
$$-\frac{(a_{12}-a_{22})}{(a_{11}-a_{21})}$$

をA_1における労働の機械に対する限界代用率とよぶ。これはA_1A_2を結ぶ線分の（横軸の負の方向となす）勾配をあらわす。この値が正であることは明らかである。すなわち限界代用率は正である。

A_1、A_2を半分づつ併用することによってできる新しい方法によって一合つくるときにはA_1とA_2との投入量の半分づつの和に等しい。もしA_1、A_2のつくる錐内（軸ではさまれている部分を錐とよぶ）に原単位点があればそれより少くなる。したがって等生産量線は右下りの直線となるか、もし折れるとすれば原点の側に凸形である。このことは、等生産量線はその上の任意の二点を結ぶ弦の左下方にあるともいえる。（一致する場合を含む）それゆえ等生産量線の勾配（の絶対値）は点が等生産量線上を右下に移るにつれて減少する。等生産量線の勾配は労働の機械に対する限界代用率であるから労働が増す代用が行われるとき、労働の機械に対する限界代用率は減るといえる。ただしA_1A_2のつくる錐内に原単位点がなければ限界代用率はかわらない。いま三つの原単位点を図のように

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

とすると労働投入量が $a_{11}<a_{21}$ のとき A_1A_2 の勾配は A_1A_3 の勾配より大きい（負の方向にはかる）から



$$-\frac{a_{12}-a_{22}}{a_{11}-a_{21}}>-\frac{a_{12}-a_{32}}{a_{11}-a_{31}}$$

となる。逆に $a_{11}>a_{21}$ のとき不等号の方向は逆になる。これら二つの式から

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{21} \\ a_{32} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix}<\begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} \\ a_{32} & a_{12} \end{vmatrix}$$

をうる。もしA_2が線分 A_1A_3 上にあるときにはこの不等号は等号となる。（シンプレックスの判

別基準）いまA_1における限界代率ではなくA_3、A_2のつくる錐内にある原単位点A_2における限界代用率については、A_2より労働がふえるときと減るときのそれとは大きさが異る。これをどのように考えるかについては後にのべる。

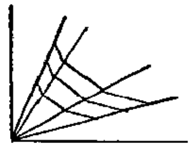
Ⅳ　限界生産力

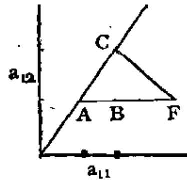
この会社が自動車を生産するのに技術的にはいろいろの生産要素の組合わせによることが可能である。いまその労働、資本のいろいろの組合わせよりえられる生産量がつぎの表であらわされるものとしよう。左に資本、下に労働量を示している。（〔8〕参照）

資本の単位数						
6	346	490	600	693	775	846
5	316	448	548	632	705	775
4	282	400	490	564	632	693
3	245	346	423	490	548	600
2	200	282	346	400	448	490
1	141	200	245	282	316	346
	1	2	3	4	5	5
	労働の単位数					

たとえば資本が五、労働が二のときの生産量は資本の欄の五と労働の欄二のところの交点を見ればそれが448であることがわかる。資本三労働六のときの生産量は600である。このように労働と資本の任意の組合わせに対応する生産量がいくらであるか（技術家によってきめられる最良の方法を用いるとき）をこの表によって知ることができる。この生産表 producicton schecule は数式を用いて $P = f(L, C)$ とあらわされ生産函数 production function とよばれることが多い。（ここでは労働量と資本量との (2,6) (3,6) (3,4) (4,3) (6,3) (6,2) 組合わせを示す点を通る軸で示される六つの生産方法があるものと仮定されている。） 前に原単位点をつらねることにより一つの等生産量線をもとめたと同じようにして、二台、三台…x台の自動車をつくるに必要な生産要素の組合わせを示す点をもとめ、それらを適当につらねて多くの等生

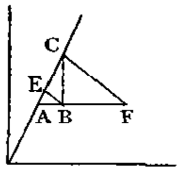
産量線を構成することができる。
すでにのべたように一〇台の自動車をつくるために必要な労働機械の使用時間を一割増すとき、自動車が丁度一台余計につくれる。すなわち生産要素の投入量と産出量とは同じ割合でふえる。このときには任意の軸上に一、二、三…台の生産量を示す点をとるとその間隔は等しい。すなわち軸はこれらの等生産量線と等しい間隔をおいて交わる。しかも等

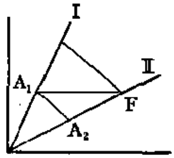




生産量線は右上方へゆくほど多い生産量をあらわす。このとき相隣れる二つの生産方法を示す軸内にある等生産量線は互に平行である。そのため任意の軸と各等生産量線とが交わってなす（右方の）勾配は互に等しい、さて周知の通り労働を一単位追加することによってえられる生産の追加量が労働の（物的）限界生産力であるが、この表を用いるとつぎのようにしてもとめることができる。たとえば資本二、労働四のとき労働を一単位追加することによってえられる生産量の追加分は 448 − 400＝48 である。すなわち二行三列にある数字（400）を同じ第二行で一つ右の第四列目にある数字（448）から差引けばよい。同様に資本の限界生産力をもとめることができる。いま一つの軸上に自動車一台を示す点Aと二台を示す点Cをとる。このAからCへ移ることは自動車が一台ふえることを意味すると同時に、そのため労働機械の投入量がそれぞれ原単位に等しい a_{11}、a_{12}だけ余計にいることを意味する。またAから機械の運転時間は一定のまま労働投入量だけ増して自動車を一台余計につくるとき、必要な生産要素投入量の組合わせはAを通る水平線上のFで示すことができる。このFはCと同じ等生産量線上にある。またCから下した垂線とAFとの交点をBとすると自動車がAからCへ一台ふえるとき必要な労働量がAB、機械量がBCで示される。

さてＡからＣへ移ることは投入量を a_{11}、a_{12} だけ順次に投じてＡからＢ、ＢからＣへの移動にわけて考えることができる。そのうち労働時間が a_{11} だけふえることにもとづく産出量の変化は AB/AF 台である。労働を一単位増すことによってできる産出量の増分すなわち労働の限界生産力





$$\frac{\text{自動車台数の増加}}{\text{労働時間の増加}}$$

は上に示した自動車 AB/AF 台、をそれをつくるに要した労働時間で割って AB/AFa_{11} となる。この労働の限界生産力はＡから水平線上を労働一単位分だけ右に移るとき交わる等生産量線の個数でかぞえることができる。いまＢを通りに平行線をひきACとの交点をＥとすると

$$AE=(AB/AF)AC \qquad EC=(BF/AF)AC$$

となる。いまＡからＣへ移るとき自動車は１台（AC＝AE＋EC）ふえている。ここで上の関係を用いると

$$AC=(AB/AF)\cdot AC+(BF/AF)\cdot AC$$

となる。ここで (AB/AF), (BF/AF) はそれぞれ労働 a_{11}、機械 a_{12} の増加にもとずく自動車の増分をあらわすからそれをそれぞれ a_{11}、a_{12} で割ればそれぞれの限界生産力をうるが、それを α、β であらわす。また $a_{11}AC$, $a_{12}AC$ はそれぞれ自動車を AC=1 台だけつくるに要する労働機械使用時間をあらわす。ここで生産を拡大しても原単位はかわらないから産出量がACの k 倍、すなわち k 台になるときには投入量も同じく k 倍いるという関係を用いると

産出量 $=\alpha$ 労働時間 $+\beta$ 機械運転時間

となる。（この関係は微分可能を仮定したオイラーの定理を用いて導出されるのが普通であるが、ここではこれを仮定していない）いま生産方法Ⅰによって自動車を一台つくるに要する投入量を a_{11}、a_{12}生産方法Ⅱによるときのそれを a_{21}、a_{22} とする。$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{22}\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{22}\end{pmatrix}$ は原単位点をあらわす。いま生産方法Ⅱによって機械を a_{12} と同じだけ運転するとき自動車は λ 台できる。これに必要な労働時間を a_{31} とする。このとき $F=\begin{pmatrix}a_{31}\\a_{32}\end{pmatrix}$（ただし $a_{32}=a_{12}$）はⅡを示す軸上 A_2 の λ 倍の距離にある。$F=\lambda A_2$ ここに便宜上 $a_{12}=a_{32}$ を機械の使用時間をはかる単位とする。A_1 は1（$=1/a_{12}$）台の自動車をあらわし、Fは λ（$=a_{22}/a_{22}=1/a_{22}$）台の自動車をあらわす。これだけの自動車をつくるとき労働時間はそれぞれ a_{11}/a_{12}, a_{21}/a_{22}時間かかる。すなわち生産方法Ⅰによって（$1/a_{12}$）台の自動車をつくるとき

$$(1/a_{12})=\alpha a_{11}/a_{12}+\beta$$

生産方法Ⅱによって（$1/a_{22}$）台の自動車をつくるとき

$$(1/a_{22})=\alpha\, a_{21}/a_{22}+\beta$$

となる。この両式より β を消去して α をもとめると

$$\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}}$$

をうる。いま生産方法IからIIへ移るときの原単位の変化をΔa_1、Δa_2とする。すなわち

$a_{21}=a_{11}+\Delta a_1$, $a_{22}=a_{12}+\Delta a_2$ とするとαは

$$\alpha = \frac{1}{a_{11}-(\Delta a_1/\Delta a_2)a_{12}}$$

となる。ここで二つの生産方法を示す軸I、IIの間にある等生産量線は平行であるが、Fにおいて等生産量線が折れ曲っている場合とそうでない場合とがある。ここでは折れ曲っていないものとしているが、仮りに折れ曲っているとしても二つの等生産量線の間隔を小さくすることによって折れ曲らないようにすることができるであろう。これが折れている場合については後にふれる。

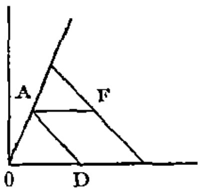
さて原単位点A_1より $-\Delta a_1/\Delta a_2$ の勾配の直線をえがきこれと横軸との交わりをDとするとDの横座標は

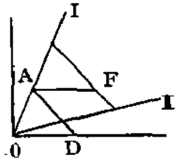
$$a_{11}-(\Delta a_1/\Delta a_2)a_{12}$$

である。ODはAFの長さに等しいからAFの示す労働量はODの示すそれに等しい。ところでAにおける限界生産力は

$$\frac{\text{産出量ではかったAF}}{\text{投入量ではかったAF}}$$

に等しい。



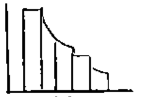


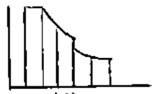
となるが、いまの場合分子は1、分母はODの示す労働投入量に等しいからAにおける労働の限界生産力は$1/(a_{11}-$

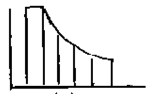
(Δa₁/Δr₂) a₁₂」とあらわされる。これはAを通る等生産量線の延長と横軸との交点Dの示す労働量をもって一を割ったものに等しい。すなわち截片DOの逆数で示される。

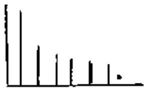
Aにおいて等生産量線が折れているときにはADはAより右下方で等生産量線に一致し、左上方では一致しない。したがってこの点を示す必要のあるときにはAより労働のふえるときの限界生産力と、減るときのそれとを区別しなければならない。上のが前者であることはいうまでもなくあきらかであろう。このようにして限界生産力を計算すとができるが、つぎに資本を一定にたもったまま労働を順次に追加投下してゆくとき、労働の限界生産物が減少

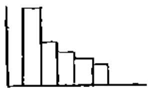
1	245
2	101
3	77
4	67
5	58
6	52


(c)


(d)


(c)


(a)


(b)

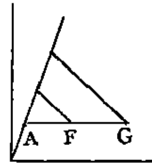
することを上の表を用いて示そう。いま三単位の資本に結合される労働を0から一単位づつ追加してゆくとき労働の限界生産力は(a)図のように棒の高さで示すことができる。図において最初の棒の高さは三単位の資本に一単位の労働(0より)追加することによってえられる生産量をあらわす。二単位の労働を結合することによってえられる生産量は最初の二つの棒の高さを加えればよい。

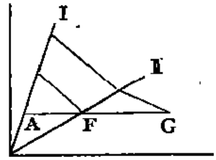
つぎにAにおける限界生産力とFにおけるそれとを比較してみよう。Aにおけると同様にFにおける労働の限界生産力は

$$\frac{\text{産出量ではかったFG}}{\text{投入量ではかったFG}}$$

とあらわされる。ここにGはFより労働だけを追加して自動車をつくると

きに要する投入量をあらわす。いま産出量ではかるとFG＝1であるからFにおける労働の限界生産力は1/(投入量ではなかったFG)となる。





図で示されているように上の図ではAF＝FG、下の図ではAF＜FGとなる。すなわちAGのつくる錐内に独立の生産方法がないときにはAF＝FGとなり、それがあるときにはAF＜FGとなる。このようにこの錐内に原単位点があればその個数に等しい回数だけ労働の限界生産力は減る。そのため労働の限界生産力は労働投下量がふえるにつれて減るか又はかわらない。けれどもそれは増えることはない。

上では労働が一単位より小さく分割できないものと仮定されているため棒の図をえたが、労働がいくらでも小さく分割できると仮定する（ただし自然数でないものは生産力がないものとする）と(b)図のように短冊の図をうる。自然数でなくても生産力があることを認めると(c)図のように短冊の上辺は右下りの曲線となるものもある。さらに原単位が無数にあるものと仮定するとこの短冊の階段の中には無くなるものができ(d)図のようになるであろう。しかし階段が全部無くなる保証はない。いま階段が全部なくなるものと仮定すると(e)図をうる。ここでたとえば四単位の労働に対応する限界生産力をもとめると、(e)のときには一つの値をうるがその外のときには一つの値にきまらぬ。すなわちそのときには四に左から近ずくときも右から近ずくときも同一の限界生産力をうるが、その他のときには両者が異る。線型計画論では労働はいくらでも小さく分割できるものと仮定されているが原単位点が無数にあると仮定したり生産函数が微分可能であると仮定することは普通許されていない。そのため一般には(c)の形の図によって

考えなければならない。このときには任意の労働投下量に対して限界生産力が一義的に定まらないという不便がある。この不便をさけるため限界生産力を「一義的に定めることが必要なときには投入物がふえるときにえられる生産物の増加ではかる」ことにきめる。ここでつぎの二点に注意しなければならない。

一、一義的な限界生産力が必要なときにはそれをもとめることができる。ただしこの場合限界生産力曲線は不連続となる。

二、連続な限界生産力曲線が必要なときにはそれをもとめることができる。ただしこの場合限界生産力は一義的に定めることができない。

このように定め、たとえば $\partial P/\partial L$ で労働の限界生産力をあらわすが以下の微分記号はすべてこの但し書のもとにあるものとする。このときには労働の限界生産力が逓減することは $\partial^2 P/\partial L^2<0$ とあらわされまた労働の機械に対する限界代用率が逓減することは $-\partial^2 C/\partial L^2<0$ とあらわされる。つぎに $-\partial^2 P/\partial C\partial L$ の符号について考えよう。これが技術的補完の問題である。

V 補完関係

前に二つの生産方法を併用するとき、その二つの生産方法が援け合って加え算的効果を発揮するというような場合はないものと仮定した。このため一見技術的補完の可能性がなくなるように思われる。けれども、実際この場合にも技術的補完の関係があることを示すことができる。のみならずこのときには技術的代用が起りえないことが示される。これを考えるためにまずヒックスに従って、技術的補完の定義をあきらかにしておこう。

エッジワースおよびパレートによって与えられた補完財の代替品の定義はこうである。「Xの手持量の増加（Yは不変）がもしYの限界効用を高めるならばYは消費者の収支計画においてXと補完的である。またXの手持量の増加（Yは不変）がもしYの限界効用を低めるならばYはXに対する代替品である。……パレートはしかし満足してよいはずはなかった。というのはこの定義を無差別曲線の称呼に翻訳しようと試みたとき、彼は困難に陥ったからである。なるほど彼はXとYとが補完的である場合とXY間の無差別曲線（消費される他の諸商品は不変と考える）が非常に曲っている場合との間に、また無差別曲線が平たい場合とXおよびYが代替品である場合との間にある平行関係をたどることができた。しかし無差別曲線のどの程度の曲率が補完財と代替財との間の区別――それは定義によれば全く截然たる区別であるべきはずである――に相当するかを見出すことは不可能だという事実から直ちに明らかにされるように、この平行関係は決して精確ではない」このためヒックスはつぎのような代替補完の定義を与える。「消費者の経済状態をこれまでよりも良化しないままに残すような形でXが貨幣に対して代替されるとき、Yの貨幣に対する限界代替率が減少するならばYはXに対する代替品であると云わねばならない。またXが貨幣に対して代替されるとき、Yの貨幣に対する限界代替率が増加するならばYはXと補完的であると云わねばならない。」〔3〕PP 60―63 生産の技術的関係においても効用理論におけると同様、A、Bとが補完的であるための条件はAのCに対する代替（Bの量は不変に保たれる）がBのCに対する限界代替率をBに有利に動かすということである。

サミュエルソンは「経済分析の基礎」においてつぎのようにいう。「過去五年間世界の最もすぐれた経済学者はヒックスの「価値と資本」の研究にかなりの時間と精力とを費した。しかしこの間、なんびともヒックスが補完について、二つあるいはそれ以上の相異なる（かつ矛盾する）定義を与えていることに気づかなかったように思われ

る。」上にのべたのはヒックスの本文における定義であるが、数学附録においては賃銀が上昇するとき労働需要が減りそれに伴なって機械に対する需要も減るとき、機械は労働に対し補完関係にあるとよんでいる。〔23〕II p. 13

本文の定義がつぎの仮定をみたす場合には数学附録の定義と等義であることはすでに証明されている。〔12〕〔13〕〔17〕参照）その仮定はつぎの通りである。まず消費者の場合からはじめる。「彼がその所得を二財以上の財の間に分割しているとき…財のうちの一つ（たとえばX）に対して他の財が代替品であるには…Xの手持量が増加するとき、次の二つの条件を満足するためにはすべての他財の量が減少しなければならないという場合であろう。二つの条件とは㈠消費者の経済状態が従来よりも良化しないままに残されること㈡これら他財の間の限界代替率が不変のままにしておかれることを云う。」〔23〕I p. 66 また生産者の場合には「もし二つ以上の要素があるとすればわたくしの判定法は他の要素の数量を一定に保つのではなくて、むしろそれらの限界生産物が変化しないように数量をかえる場合にB（Bの数量は不変）の限界生産物がどうなるかにかかっている」〔23I〕I p. 43（末尾の数学注参照）

したがってL、C、A_3…A_nをつかってPをつくるとき、労働資本に対して補完関係にあることはつぎの三つの条件を満足する如く」が（P, A_3…, A_n）と代用せられる場合、Cの限界生産力が増せば $\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial P}{\partial C}\right)>0$ LはCと補完的である。

㈠ 生産函数は不変

㈡ Cは不変

㈢ A_3…A_n の限界生産力は不変

更にヒックスは加法性の仮定のみたされているときには必ず補完的であることをつぎのように示す。「忘れてなら

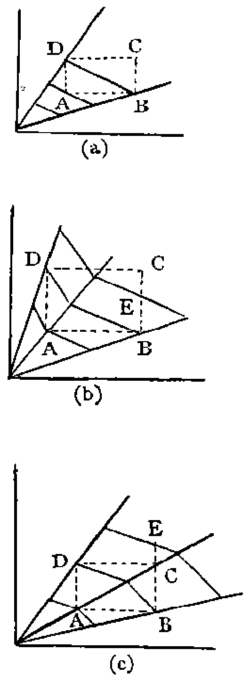
ないのは、つぎのような場合には二つの要素は補完的だということである。すなわちAの使用の増加（Bは不変として）と、その結果たるXの産出量の増加とがBのXへの限界変形率をBに有利に動かす―換言すればBの限界生産物を高める―という場合である。（だから二つの要素が補完的であるための判定基準は、二つの要素が「協働的」であるための充分に確立され、よく知られている判定基準―一方の増加が他方の限界生産物を高めなければならぬということ―に他ならない。…

さて次のような特殊の生産状況においてはどういうことが起るかを考えよう。すなわちそこでは企業の固定的「生産機会」の寄与は消失し、従って費用は産出量の増加につれて上昇することはないとする。またそこでは大規模生産による節約も存在せず、従って費用は産出量の増加につれて低下することもないとする。そして事態は丁度完全競争と矛盾しないとする。そうすると費用（平均費用も〔二つの生産要素を比例的に増すときの一層複雑な〕限界費用も）は不変であり、餘剰は零である。各要素が一単位につきそれの限界生産物に等しいだけの価格を支払われると、總生産物は余すところなく失われてしまう。限界費用は不変であるから二つの要素の同時的な比例的増加による生産物の増加（二つの要素を一括したものの限界生産物）は不変でなければならない。〔軸上に1、2、3…単位を示す点をとるとその間隔は等しい〕かくしてもし固定的「生産機会」がすこしも生産の規模を制限しないならば二つの要素は補完的でなければならない。」〔23〕I pp. 138―139

この前半は補完関係の定義であり、それにつづいて大規模生産による経済性がない、すなわち可分性の仮定がみたされていることが説明してある。けれども可分性の仮定から補完関係が導かれることの説明は明らかでない。

また上の補完の定義は三つの商品を用いて定義されている。したがってヒックスはこの補完関係についてつぎの

ようにのべている。「無差別図がこの特別の問題に対して殆ど直接には役に立たないということが判明するのは、われわれの新しい定義の甚だ奇妙な帰結である。無差別図は二「商品」を二つの軸に沿うて測るのであるから消費者が自己の所得を二つの「商品」に、しかもただ二つの「商品」だけに費すものと考えられるときに有用であるにすぎない。…しかし連関財の問題を二次元の無差別図の上で取扱うことは不可能である。二つの連関財と貨幣（不可欠の背景）とを表示するためには三つの次元が必要である。このことは連関財の理論が代数学…であるいはここでのように普通の言葉であらわされるのが最も便利であることを意味する」〔23〕I pp. 63—64 と考える。ここではヒックスが不可能といった二次元の図を用いて補完関係を示し、更に加法性から補完関係がえられる関係を純粋に技術的関係のみにおいて考えてみよう。



(a)　(b)　(c)

いま二台の自動車をつくるに必要な労働機械の投入量をAで示す。このときAより労働だけ追加して一台の自動車をつくってBに移る。また労働は追加せず機械だけ追加して一台の自動車をつくるときDに移る。このB、Dがいずれも三台の自動車をあらわす等生産量線上にあることはいうまでもない。さていまこのABおよびADを一辺とする矩形をえがき残りの頂点をCとする。(a)図で示してあるような場合には四台の自動車を示す等生産量線はCを通る。このCはBから機械の運転時間のみを延ばして一台の自動車を追加的につくるとき必要な生産要素の組合わせを示すが、この場合Aから自動車を一台余計につくるときもBから一台追加するときも、その一台の追加生産に必要な機

械運転時間は同じである。

ところが等生産量線が(b)図で示してあるような場合には事情がかわる。(a)図の場合にはBDのつくる錐内には原単位点がないが(b)図の場合にはそれがある。（いまの場合Aを通る）そのため等生産量線はこの錐内で折れている。このとき前と同じ手続きに従って矩形をつくり新しい頂点Cをもとめてもそれは四台の自動車をつくるに必要な生産要素を示す等生産量線上にない。Cはこの線の外側（原点と反対側）にある。この場合にはAから一台の自動車を追加するために必要な機械運転時間はBから一台追加するに必要な運転時間より長い。すなわちAから一台つくるとADしたがってBCだけの機械の運転が必要であるのに、Bから一台つくるにはBEしか必要でない。すなわちECだけ機械運転時間が短かい。

最後に仮りに等生産量線が(c)図で示されるような場合にはどうであろうか。このときもBDのつくる錐内に原単位点があるが(b)図の場合と丁度反対に、Cは四台の自動車を示す等生産量線の内側（原点側）にある。このときには一台の自動車を追加してつくるのにAからADしたがってBCだけの機械運転時間を要するが、BからはBEだけ運転しなければならない。このように考えると技術的代用補完は等生産量線が原点に対し凸形、凹形であることに対応する。

このような差がなぜ起ったか。いまAとBとの差異に注目してみるとAにおけるよりBの方が労働時間が長い。このように労働を沢山つかっているときの方が、一単位の機械運転時間からできる自動車が少い。このように労働が機械の（限界）生産力をたすけているとき労働は機械に対して技術的補完（technically complementary）の関係にあるといい、(c)図の場合のように労働が機械の（限界）の生産力を阻げているとき、労働は機械に対し技術的代

用 (technically substitute) の関係にあるという。また(a)図で示したように労働がふえても機械の生産力をたすけることも阻げることもしないとき、労働は機械に対し技術的独立 (technically independent) であるという。すでにのべたことから容易にわかるように、原単位点をもとめるとき技術的に劣るものは除いてあるから、このとき等生産量線は決して原点に対して凹型とならず、したがって(c)図のような技術的代用は起りえない。すなわちこの場合(加法性の仮定されている場合)補完又は独立の関係をうる。ヒックスの場合独立の関係をえないのはLのCに対する限界代用率が逓減すること―すなわち原単位点が軸内にあることを仮定しているからに他ならない。(数学注参照)

もし「可分性の仮定」をすて大規模生産にもとずく不経済を認めるときには、等生産量線が原点に対し凸形であるにかかわらず、技術的独立ないし技術的代用の場合を考えることができる。「もし固定的「生産機会」がすこしも生産規模を〔正の方向にも負の方向にも〕制限しないならば二つの要素は補完的でなければならない。生産機会が幾分でも拡張を制限する働きをなすや否や、二つの要素は必ずしも補完的ではなくなる。」〔13〕I p. 193

数学注

いまn種の生産要素$x_1 \cdots x_n$を投入し一種の生産物x_0をつくる会社の生産函数を

$$x_0+f(x_1, \cdots x_n)=0$$

とあらわす。このときヒックスの本文における技術的補完の定義は連立方程式

$$\frac{dx_0}{dx_2}+R_2+R_3\frac{dx_3}{dx_2}+\cdots+R_n\frac{dx_n}{dx_2}=0$$

$$\cdots + R_{1n}\frac{dx_n}{dx_2} = \frac{\delta R_1}{\delta x_2}$$

$$\cdots + R_{2n}\frac{dx_n}{dx_2} = \frac{\delta R_2}{\delta x_2}$$

$$\cdots + R_{nn}\frac{dx_n}{dx_2} = 0$$

$$\begin{vmatrix} R_3 & \cdots & R_n \\ R_{13} & \cdots & R_{1n} \\ R_{23} & \cdots & R_{2n} \\ R_{33} & \cdots & R_{3n} \\ & & \vdots \\ R_{n3} & \cdots & R_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & R_2 & 0 & R_3 & \cdots & R_n \\ R_{10} & R_{12} & 0 & R_{13} & \cdots & R_{1n} \\ R_{20} & R_{22} & 1 & R_{23} & \cdots & R_{2n} \\ R_{30} & R_{32} & 0 & R_{33} & \cdots & R_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n0} & R_{n2} & 0 & R_{n3} & \cdots & R_{nn} \end{vmatrix}^{-1}$$

$D_{ij} = D$ の要素　R_{ij} の余因子

$D_{ijkl} = D_{ij}$ の要素　R_{kl} の余因子

とするとこれは

$$(1)\quad \frac{\partial R_1}{\partial x_2} = \frac{D_{11,22}}{D_{21}}$$

となる。また価格がP_2 がかわるときの x_1に対する需要の変動は

$$(2)\quad \frac{\partial x_1}{\partial P_2} = \frac{D_{21}}{P_0 D}$$

となる。これが数学注における定義に他ならない。このとき(1)(2)との間につぎの関係がある。

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial P_2} = \frac{1}{P_0} \frac{D_{11}}{D} \frac{D_{11\,22}}{D_{11}} > 0$$

すなわち本文における定義(1)と数学注における定義(2)の符号は等しい。つぎに生産量 x_0がすべての投入量 $x_1 \cdots x_n$ に関して1次の同次函数であり、限界生産物 — $\partial x_0/\partial x_i = R_i$ がすべての投入量 $x_1 \cdots x_n$ および生産量 x_0 の0次の同次函であることを考慮に入れるとき、x_2 は x_1に対し必ず補完的であることを示そう。$x_0 \cdots$が $x_1 \cdots x_n$ に関する一次の同次函数であることより

$$dx_0 + R_1dx_1 + R_2dx_2 + \cdots + R_ndx_n$$
$$= (1 + R_1 + R_2 + \cdots + R_n)\, kdx_0 = 0, \quad dx_1/dx_0 = k \neq 0$$

をえ、またR_iが$x_0\ x_1 \cdots x_n$に関する0次の同次函数であることより

$$R_{i0}\, dx_0 + R_{i1}\, dx_1 + R_{i2}\, dx_2 + \cdots + R_{in}\, dx_n$$
$$= (R_{i0} + R_{i1} + R_{i2} + \cdots + R_{in})\, hdx_n = 0, \quad dx_i/dx_0 = h \neq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

をうる。この関係を用いてD_{21}を変形すると、すなわち第二列を、すべての列の要素の和でおき換え、上にえた結果を用いるとつぎの関係をうる。

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 1 & R_2 & R_3 & \cdots & R_n \\ R_{10} & R_{12} & R_{13} & \cdots & R_{1n} \\ R_{30} & R_{32} & R_{33} & \cdots & R_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n0} & R_{n2} & R_{n3} & \cdots & R_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & R_1 & R_3 & \cdots & R_n \\ R_{10} & R_{11} & R_{13} & \cdots & R_{1n} \\ R_{30} & R_{32} & R_{33} & \cdots & R_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n0} & R_{n2} & R_{n3} & \cdots & R_{nn} \end{vmatrix} = - D_{22}$$

$$\therefore \frac{\partial R_1}{\partial x_2} = - \frac{D_{11,22}}{D_{22}} > 0$$

すなわちx_2はx_1に対し必ず補完関係にある。ここでは便宜上微分可能を暗黙のうちに仮定した。これを仮定しない

ときにはこの微係数はⅣにのべた但書に注意しておけばよい。だたこのときには分母にある $D_{22}=0$ の場合も考えに入れなければならぬからない。

文献

〔1〕 Charnes, A. Cooper, W. Henderson, H. *An Introduction to Linear Programmin.* 1953

〔2〕 Dorfman, R. *Application of Linear Programming to the theory of the Firm* 1951

〔3〕 Mathematical, or "Linear" Programming : A Nonmathematical Exposition *American Economic Review*X., LIII Dec 1955

〔4〕 Hicks, J. R. *Value andCapital* 1946

〔5〕 Koopmans, T. C. (ed) *Activity Analysis of Production and Allocption* 1951

〔6〕 Mosak, J. I. *General Eouilibrium Theory of International Trade* 1944

〔7〕 Samuelson, P. A. *Foundations of Economic Analysis* 1948

〔8〕 Samuelson, P. A. *Economicε. An Introuctory Analysis*

〔9〕 福岡正夫 線型計画の原理 Simplex Method 三田学会雑誌一月第四九巻第一号一九五六年一月

〔10〕 後藤幸男 リニアー・プログラミングの適用について 調査と資料第八条一九五五年十二月

〔11〕 久武雅夫 渡辺経彦 活動分析 中山伊知郎編 経済学大辞典 一九五五年六月

〔12〕 市村真一 ヒックスの企業動学理論に関する一注解・近代経済理論研究第一号

〔13〕 市村真一 嗜好の変化と価格の変動・経済論叢 第六七巻 第四・五号

〔14〕 小宮隆太郎訳　ドーフマン・リニヤープログラミングその理論と企業への適用　一九五五年十二月
〔15〕 栗村雄吉　聯関財の理論　社会科学評論　一九四九年三月
〔16〕 水野正一　藤野正三郎　代替補完　中山伊知郎編　経済学大辞典　一九五五年六月
〔17〕 森嶋通夫　「消費者活動と企業者活動」　経済論叢　六二巻　第四号三二—三三
〔18〕 森嶋瑤子　限界生産力説と線型計画論——企業理論の発展　大阪大学経済学　一九五五年二月
〔19〕 建元正弘　線型計画の原理　調査資料　第八号　一九五五年十二月
〔20〕 上野裕也　線型計画における簡便法　調査と資料　第八号　一九五五年十二月
〔21〕 渡辺経彦　Linear Programming　モデルの簡単な応用について　季刊理論経済学　巻三、四号　一九五五年三月
〔22〕 安井琢磨　連関財に関する一考察　経済学論集　第十三巻　第八号
〔23〕 安井琢磨　熊谷尚夫共訳　価値と資本Ⅰ　一九五一年九月　Ⅱ一九五一年十一月